PRELEGEREA 2
FUNDAMENTELE STATICII MATRICEALE CLASICE

2.1 Deformarea statică a structurilor cu comportare liniară

Cazul structurii cu o deplasare caracteristică

Fie structura unidimensională (redusă la un element structural), liberă a se deplasa la unul din capete (numit *nod* şi numerotat *1*), a cărei axă longitudinală coincide cu direcţia axei de referinţă *X* (orientată, pozitiv, către *nodul 1*), deformabilă elastic şi de rigiditate *K*, acţionată static în *nodul 1* de forţa F_1, producându-se deplasarea D_1 după direcţia acesteia (figura 2.1).

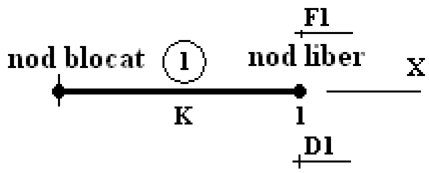

Figura 2.1 Model de structură cu o deplasare caracteristică

Starea deformării statice a structurii este complet caracterizată de relaţia 2.1a,

$$K \cdot D_1 = F_1 \tag{2.1a}$$

care poate avea şi o exprimare matriceală, de forma celei date de relaţia 2.1b,

$$[K] \cdot \{D\} = \{F\} \tag{2.1b}$$

unde $[K]$ este matricea de rigiditate a structurii;
$\{D\}$ - vectorul deplasării din nodul liber al structurii;
$\{F\}$ - vectorul forţei din nodul liber al structurii.

Cazul structurii cu două deplasări caracteristice

Fie structura unidimensională (redusă la un element structural), liberă a se deplasa la ambele capete (numite *noduri* şi numerotate *1, 2*), a cărei axă longitudinală coincide cu direcţia axei de referinţă *X* (orientată, pozitiv, de la *nodul 1* către *nodul 2*), deformabilă elastic şi de rigiditate *K*, acţionată static în *nodul 1* de forţa F_1, producându-se o deplasare D_1 după direcţia acesteia, şi în *nodul 2* de forţa F_2, producându-se o deplasare D_2 după direcţia acesteia (figura 2.2).

Dacă se face ipoteza că structura se deformează elastic, dar în domeniul micilor deformaţii, se poate aplica principiul suprapunerii efectelor şi problema deformării statice a structurii se reduce la rezolvarea a două probleme a deformării statice deja cunoscute:

- *problema 1*, care corespunde situaţiei când se eliberează nodul *1*, $D_1 \neq 0$, rămânând împiedicat nodul *2*, $D_2=0$ (figura 2.2a);

- *problema 2*, care corespunde situaţiei când rămâne împiedicat nodul *1*, $D_1=0$ şi se eliberează nodul *2*, $D_2 \neq 0$ (figura 2.2b).

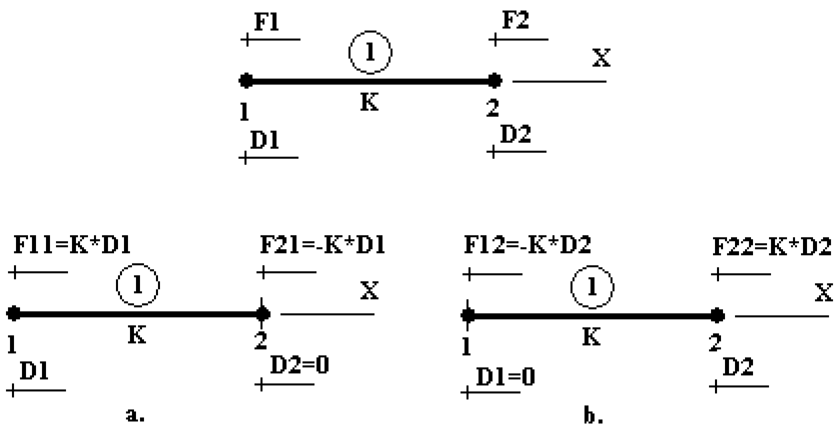

Figura 2.2 Model de structură cu două deplasări caracteristice

În cazul *problemei 1*, starea deformării statice a structurii este complet caracterizată de relaţia matriceală 2.2a,

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ -K & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} \tag{2.2a}$$

iar în cazul *problemei 2*, de relaţia matriceală 2.2b,

$$\begin{bmatrix} 0 & -K \\ 0 & K \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,2} \end{Bmatrix} \tag{2.2b}$$

Indicii forţelor precizează: primul localizarea forţei (efectului), al doilea localizarea deplasării care a produs-o (cauzei).

În final, starea deformării statice a structurii iniţiale este complet caracterizată de efectul sumat al celor două situaţii, respectiv ecuaţia obţinută prin sumarea matriceală a relaţiilor 2.2a şi 2.2b, rezultând relaţia matriceală 2.2c.

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1} + F_{1,2} = F_1 \\ F_{2,1} + F_{2,2} = F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.2c}$$

Relaţia 2.2c poate avea şi o formă compactă precum cea dată de relaţia 2.1b.

Cazul structurilor cu comportare liniară

Fie structura unidimensională cu două elemente structurale (având *noduri* numerotate *1, 2, 3*), a căror axe longitudinale coincid cu direcţiile axelor proprii *x* şi care ambele coincid cu direcţia axei de referinţă a structurii *X*, deformabile elastic cu rigidităţile *K1* şi *K2*, având *extremităţile* primului element (numerotate *1*, *2*) identice cu *nodurile 1* şi *2* ale structurii, respectiv ale celui de al doilea element (numerotate *1*, *2*) identice cu *nodurile 2* şi *3* ale structurii, cuplate în *nodul 2*, în *noduri* acţionând static forţele F_1, F_2 şi F_3 ce produc pe direcţia acestora deplasările D_1, D_2 şi D_3 (figura 2.3).

Dacă se face ipoteza că structura se deformează elastic, dar în domeniul micilor deformaţii, se poate aplica principiul suprapunerii efectelor şi problema deformării statice a structurii se reduce la trei probleme a deformării statice deja cunoscute:

- *problema 1*, corespunzând situaţiei în care se eliberează nodul *1*, $D_1 \neq 0$, deplasările celorlalte noduri fiind împiedicate, $D_2 = D_3 = 0$, (figura 2.3a);
- *problema 2*, corespunzând situaţiei în care se eliberează nodul *2*, $D_2 \neq 0$, deplasările celorlalte noduri fiind împiedicate, $D_1 = D_3 = 0$, (figura 2.3b);
- *problema 3*, corespunzând situaţiei în care se eliberează nodul *3*, $D_3 \neq 0$, deplasările celorlalte noduri fiind împiedicate, $D_1 = D_2 = 0$, (figura 2.3c).

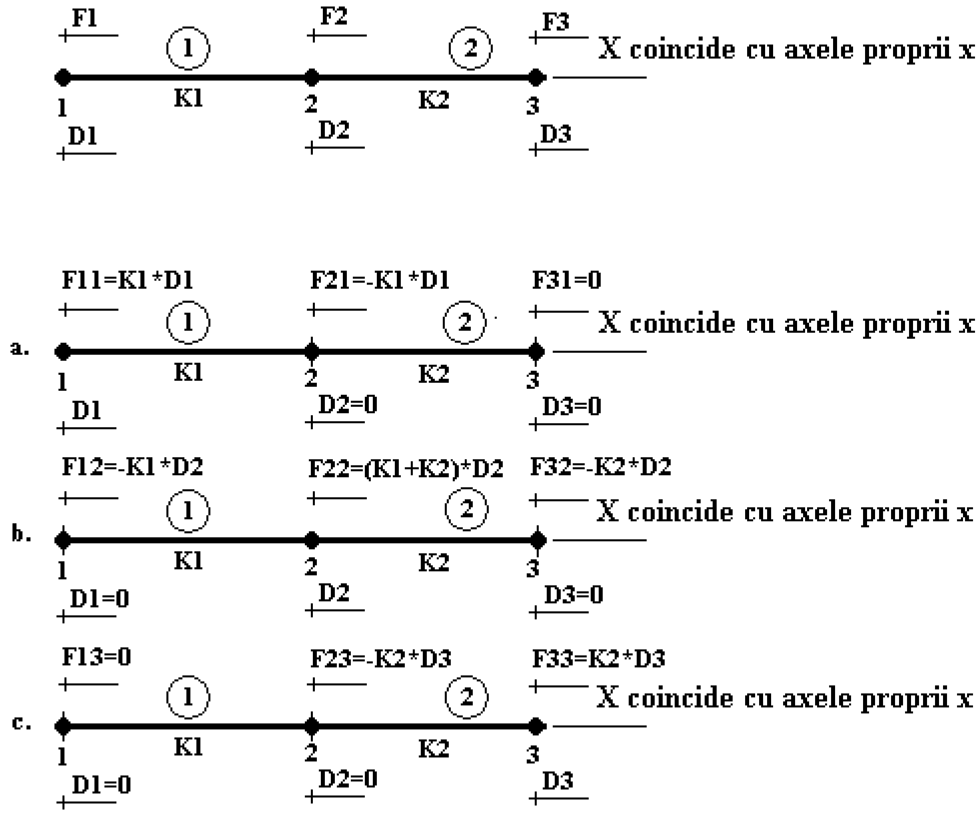

Figura 2.3 Model de structură cu două elemente componente

În cazul *problemei 1*, starea deformării statice a structurii este complet caracterizată de relaţia matriceală 2.3a;

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \\ F_{3,1} \end{Bmatrix} \tag{2.3a}$$

în cazul *problemei 2*, de relaţia matriceală 2.3b;

$$\begin{bmatrix} 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & K_1+K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,2} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} \tag{2.3b}$$

în cazul *problemei 3*, de relaţia matriceală 2.3c.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,3} \\ F_{2,3} \\ F_{3,3} \end{Bmatrix} \tag{2.3c}$$

Indicii forţelor precizează: primul localizarea forţei (efectului), al doilea localizarea depasării care a produs-o (cauzei).

În final, starea de deformare statică a structurii iniţiale este complet caracterizată de efectul sumat al celor trei situaţii, respectiv ecuaţia obţinută prin sumarea matriceală a relaţiilor 2.3a, 2.3b şi 2.3c, cu obţinerea relaţiei 2.3d.

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1}+F_{1,2}+F_{1,3}=F_1 \\ F_{2,1}+F_{2,2}+F_{2,3}=F_2 \\ F_{3,1}+F_{3,2}+F_{3,3}=F_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3d}$$

Relaţia 2.3d poate avea şi o formă compactă precum, cea dată de relaţia 2.1b.

Din punctul de vedere matematic, relaţia 2.3d poate fi privită ca suma ecuaţiilor matriceale prezentate în relaţiile 2.4a şi 2.4b.

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{Bmatrix} \tag{2.4a}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix} \tag{2.4b}$$

Prin eliminarea liniilor şi coloanelor care au toate elementele egale cu zero, din matricele de rigiditate, relaţiile 2.4a şi 2.4b devin cele din relaţiile 2.5a şi 2.5b.

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{Bmatrix} \tag{2.5a}$$

şi

$$\begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix} \qquad (2.5b)$$

Aduse la această formă, relaţiile 2.5a şi 2.5b caracterizează starea de deformare statică a elementului structural 1, respectiv 2 (a se vedea relaţia 2.2c), unde indicii superiori precizează apartenenţa la element.

Relaţiile matriceale 2.5a şi 2.5b reprezintă ecuaţiile matriceale de echilibru static raportat (numai) la *parametrii structurii aferenţi elementului*: principali D_1, D_2 şi secundari F_1, F_2 pentru elementul structural 1, respectiv principali D_2, D_3 şi secundari F_2, F_3 pentru elementul structural 2.

Relaţiile 2.4a şi 2.4b reprezintă ecuaţiile matriceale de echilibru static raportat la (toţi) *parametrii structurii*: principali D_1, D_2, D_3 şi secundari F_1, F_2, F_3, pentru cele două elemente structurale.

2.2 Metoda staticii matriceale clasice exprimarea în deplasări

2.2.1 Prezentarea generală a metodei

Cazul 3, tratat în paragraful 2.1, poate fi generalizat pentru o structură cu un număr oarecare de elemente, a cărei axă longitudinală coincide cu direcţiile axelor proprii de referinţă *x* şi care toate coincid cu direcţia axei de referinţă a structurii *X*. Generalizarea poate fi făcută şi pentru situaţia în care coincidenţa nu are loc, definind parametri şi un sistem de referinţă pentru fiecare element, precum şi un mod de proiecţie a parametrilor în sistemul de referinţă al structurii.

Cazul 3 conduce şi la stabilirea unui proces de calcul sistematizat, etapizat, bazat pe ideea că starea de deformare a unei structuri poate fi cunoscută dacă se cunoaşte ecuaţia de echilibru matriceală ce caracterizează starea de deformare a fiecărui element structural. Această concluzie pune bazele calculului matriceal, în forma sa clasică, prezentată în continuare, particularizată pentru cazul exprimării în deplasări a metodei (parametrii principali fiind deplasările acţionând la extremităţi sau noduri şi cei secundari forţele corespunzătoare deplasărilor).

Etapa 1. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru pentru fiecare element structural:

- *etapa 1.1*: prin raportare la parametrii proprii;
- *etapa 1.2*: prin raportare la parametrii structurii aferenţi;
- *etapa 1.3*: prin raportare la parametrii structurii (toţi parametrii structurii).

Etapa 2. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru a structurii, prin sumarea ecuaţiilor matriceale de echilibru a tuturor elementelor sau asamblarea acestora (raportarea făcându-se la parametrii structurii).

Etapa 3. Introducerea condiţiilor la limită tip:

- *Dirichlet*, prin restricţionarea parametrilor principali (impunerea deplasarilor la nodurile structurii);
- *Neumann*, prin restricţionarea parametrilor secundari (impunerea forţelor ce acţionează la nodurile structurii);
- *Cauchy*, prin restricţionarea conlucrării cu mediul adiacent (precizarea caracteristicilor deformării mediului dadiacent).

Etapa 4. Determinarea parametrilor principali (deplasărilor necunoscute din nodurile structurii) prin rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultat în urma ridicării nedeterminării matematice, implicit statice, cu ocazia impunerii condiţiilor la limită.

Odată ce valorile parametrilor principali (deplasărilor din nodurile libere ale structurii) sunt cunoscute, metoda staticii matriceale clasice (exprimarea în deplasări) este finalizată, urmând ca alte rezultate să fie stabilite în etape auxiliare: determinarea valorilor parametrilor secundari (forţelor din nodurile cu rezemări) sau solicitărilor/ eforturilor din elementele structurii.

2.2.2 Introducerea condiţiilor la limită tip Dirichlet şi Neumann

În metoda staticii matriceale clasice, introducerea condiţiilor la limită tip Dirichlet şi Neumann (*Etapa 3*) se poate face în baza unui proces de calcul etapizat.

Metoda generală de introducere a condiţiilor la limită constă în aplicarea de permutări circulare în sistemul ecuaţiilor de echilibru al structurii (obţinut în *Etapa 2*) pentru gruparea parametrilor necunoscuţi (purtând indicele *nec*) şi impuşi/condiţionaţi la limită (purtând indicele *cl*); a se vedea aplicaţia de la paragraful 2.2.3.

În continuare se va prezenta o metodă de introducere a condiţiilor la limită pretabilă unui calcul automatizat, cu particularizarea necesară pentru cazul exprimării în deplasări a metodei.

Etapa 3.1. Identificarea valorilor parametrilor secundari restricţionaţi (forţelor nodale impuse) şi introducerea în vectorul corespunzător (al forţelor, *F*).

Etapa 3.2. Identificarea coloanei din matricea de rigiditate, *K*, corespunzând parametrului principal restricţionat (deplasării impuse), indexul coloanei fiind identic cu indexul parametrului, şi sumarea elementelor acesteia, cu semn schimbat, la elementele corespondente din vectorul forţelor, după ce au fost multiplicate cu valoarea parametrului principal (deplasării); operaţiunea se repetă pentru fiecare parametru restricţionat (deplasare impusă).

Etapa 3.3. Identificarea ecuaţiilor din sistemul de ecuaţii şi a coloanelor din matricea de rigiditate corespunzând parametrilor principali restricţionaţi (deplasări impuse) şi eliminarea acestora.

Sistemul ecuaţiilor de echilibru, redus la numărul deplasărilor necunoscute, poate fi rezolvat pentru că determinantul asociat matricei de rigiditate (redusă şi ea) este diferit de zero; soluţia sistemului de ecuaţii nou format este unică.

2.2.3 Aplicaţie la metoda staticii clasice de analiză a structurilor

Enunţarea problemei: să se efectueze analiza statică (determinarea deplasărilor nodurilor şi forţelor din reazeme) pentru structura formată din trei elemente structurale coaxiale, având rigidităţile axiale *k1=1000 KN/m*, *k2=2000 KN/m*, *k3=1000 KN/m*, cu deplasările blocate la capete (noduri) şi acţionată în nodurile de cuplaj de două forţe egale cu *10 KN* şi *-20 KN* (figura 2.4).

Rezolvarea problemei:

Etapa 0. Stabilirea modelului structural specific metodei staticii matriceale clasice, exprimarea în deplasări (figura 2.4):

- alegerea convenabilă a sistemului de referinţă al structurii; în acest caz sistemul de referinţă se reduce la o singură axă dispusă în lungul sistemului structural, notată cu *X*;

- alegerea convenabilă a sistemului de unităţi de măsură pentru parametrii (mărimi fizice) care intervin; în acest caz *m* pentru lungimi şi *KN* pentru forţe (se păstrează acelaşi pe tot parcursul desfăşurării calculului);

- discretizarea naturală a sistemului cu elemente structurale; se definesc noduri le capetele structurii şi în locaţiile de conectare, după care se numerotează, 1 … 4 (în principiu, nodurile pot fi numerotate aleator, dar există numerotări care favorizează numărul operaţiilor de calcul la unele implementări pe computer);

- numerotarea elementelor structurale, 1 … 3 (în principiu, elementele structurale pot fi numerotate aleator);

- definirea parametrilor principali ai structurii sau deplasărilor caracteristice pentru nodul curent, deplasare de translaţie după axa *X*, şi numerotarea lor la nivelul întregii structuri, D_1 ... D_4 (deplasarea este pozitivă când are acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei cu care este paralelă);

- definirea parametrilor secundari ai structurii sau forţelor caracteristice pentru nodul curent, forţă după axa *X*, şi numerotarea lor la nivelul întregii structuri, F_1 ... F_4 (forţa este pozitivă când are acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei cu care este paralelă).

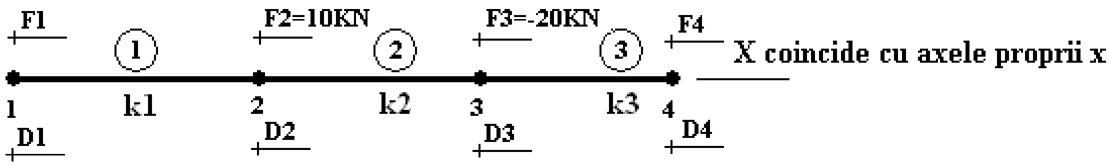

Figura 2.4 Modelul virtual discret al structurii

Etapa 1. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru fiecare element structural:

- *elementul structural 1*: stabilirea modelului de calcul pentru elementul structural (figura 2.5a):

  - definirea extremităţilor elementului structural şi numerotarea lor 1 … 2;

  - alegerea convenabilă a sistemului de referinţă al elementului structural; în acest caz sistemul de referinţă se reduce la o singură axă, dispusă în lungul elementului structural (cu originea în extremitatea 1 şi orientată, pozitiv, către extremitatea 2), notată cu *x*;

  - definirea parametrilor principali ai elementului structural sau deplasărilor caracteristice pentru extremitatea curentă, deplasare de translaţie după axa *x*, şi numerotarea lor la nivelul elementului structural, d_1 ... d_2 (deplasarea este pozitivă când are acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei cu care este paralelă);

  - definirea parametrilor secundari ai elementului structural sau forţelor caracteristice pentru extremitatea curentă, forţă după axa *x*, şi numerotarea lor la nivelul elementului structural, f_1 ... f_2 (forţa este pozitivă când are acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei cu care este paralelă);

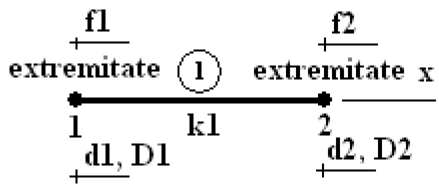

Figura 2.5a Modelul virtual al elementului structural 1

- *etapa 1.1*: prin raportare la parametrii proprii:

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

- *etapa 1.2*: prin raportare la parametrii structurali aferenţi:

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{Bmatrix}$$

- *etapa 1.3*: prin raportare la parametrii structurali:

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \end{Bmatrix}$$

Elementul structural 2: stabilirea modelului de calcul pentru elementul structural; vezi elementul structural 1 (figura 2.5b):

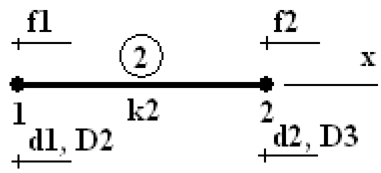

Figura 2.5b Modelul virtual al elementului structural 2

- *etapa 1.1*: prin raportare la parametrii proprii:

$$\begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

- *etapa 1.2*: prin raportare la parametrii structurali aferenţi:

$$\begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix}$$

- *etapa 1.3*: prin raportare la parametrii structurali:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{Bmatrix}$$

Elementul structural 3: stabilirea modelului de calcul pentru elementul structural; vezi elementul structural 1 (figura 2.5c):

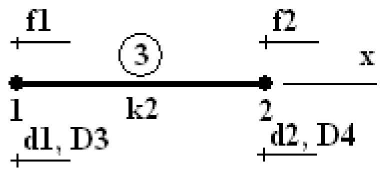

Figura 2.5c Modelul virtual al elementului structural 3

- *etapa 1.1*: prin raportare la parametrii proprii:

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

- *etapa 1.2*: prin raportare la parametrii structurali aferenţi:

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^3 \\ F_4^3 \end{Bmatrix}$$

- *etapa 1.3*: prin raportare la parametrii structurali:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \\ F_4^3 \end{Bmatrix}$$

Etapa 2. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static a structurii:
- sumarea ecuaţiilor matriceale de echilibru a elementelor structurale raportate la parametrii structurali:

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 3000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

Etapa 3. Introducerea condiţiilor la limită tip Neumann şi Dirichlet:

- aplicarea de permutări circulare în sistemul de ecuaţii obţinut în *Etapa 2*, pentru gruparea parametrilor necunoscuţi (purtând indicele *nec*) şi condiţionaţi la limită (purtând indicele *cl*), cu obţinerea sistemului de ecuaţii:

$$\begin{bmatrix} 3000 & -2000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 1000 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

sau a sistemului de ecuaţii obţinut prin gruparea termenilor necunoscuţi (D_2, D_3 şi F_4, F_1), respective condiţionaţi la limită (D_4, D_1 şi F_2, F_3):

$$\begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_{nec} \\ D_{cl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{cl} \\ F_{nec} \end{Bmatrix}$$

de unde se obţin ecuaţiile:

$$K11 \times D_{nec} + K12 \times D_{cl} = F_{cl}$$
$$K21 \times D_{nec} + K22 \times D_{cl} = F_{nec}$$

şi unde prima ecuaţie a sistemului poate fi pusă sub forma:

$$K11 \times D_{nec} = F_{cl} - K12 \times D_{cl}$$

sau făcând înlocuirile corespunzătoare, prin introducerea condiţiilor la limită:

- tip *Dirichlet*, deplasările nodale impuse fiind $D_1=0\ m$ şi $D_4=0\ m$;
- tip *Neumann*, forţele nodale impuse fiind $F_2=10\ KN$ şi $F_3=-20\ KN$.

$$\begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 3000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = 10 \\ F_3 = -20 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -2000 & 0 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_4 = 0 \\ D_1 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

Etapa 4. Determinarea deplasărilor necunoscute (finalizarea metodei):

- se rezolvă sistemul de ecuaţii din *Etapa 3*, rezultând:

$$D_2 = -0{,}002\ m$$
$$D_3 = -0{,}008\ m$$

Etapa 5 (auxiliară). Determinarea forţelor din nodurile de rezemare:

- se utilizează ecuaţia:

$$K21 \times D_{nec} + K22 \times D_{cl} = F_{nec}$$

unde făcând înlocuirile şi operand corespunzător se obţine:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1000 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_2 = -0{,}002 \\ D_3 = -0{,}008 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_4 = 0 \\ D_1 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 = 8 \\ F_1 = 2 \end{Bmatrix} \text{ KN}$$

Verificarea corectitudinii rezultatelor obţinute: suma forţelor din nodurile pentru rezemare (8 KN + 2 KN = 10 KN) este egală şi de semn contrar cu suma acţiunilor (10 KN - 20 KN = -10 KN).